



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

08F

D

دوپینگ ماز

آزمون دوپینگ ماز - ۱۴۰۰/۰۳/۸

دفترچه پاسخ ریاضی (رشته تجربی)

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراحان سؤال	ویراستاران
مهرداد کیوان	میلاد حسینی نامی
حسین شفیع زاده	ارسلان حسونند
	مهدی حاجی نژادبان

- ۱- چند جمله‌ای $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 3x + 2$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر است، مقدار a کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳

پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱: باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$ برابر است با $P(a)$.

نکته ۲: اگر $P(a) = 0$ آنگاه چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$ بخش پذیر است.

چون چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر است، پس بر $x - 1$ و $x + 1$ بخش پذیر است. در نتیجه هم $P(1) = 0$ است و هم $P(-1) = 0$.

$$\begin{cases} P(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b - 3 + 2 = 0 \Rightarrow a + b = 0 \\ P(-1) = 0 \Rightarrow 1 - a + b + 3 + 2 = 0 \Rightarrow -a + b = -6 \end{cases}$$

از حل دستگاه بالا، $a = 3$ و $b = -3$ به دست می آید.

- ۲- تابع $f(x) = a[-x] + 2a - [x]$ در نقطه $x = 2$ حد دارد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

پاسخ: گزینه ۴

نکته: تابع f به شرطی در نقطه a حد دارد که دارای حد چپ و حد راست برابر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = a[-(2^+)] + 2a - [2^+] = -3a + 2a - 2 = -a - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = a[-(2^-)] + 2a - [2^-] = -2a + 2a - 1 = -1$$

حد چپ و راست را برابر هم قرار می دهیم.

$$-a - 2 = -1 \Rightarrow a = -1$$

پس $f(x) = -[-x] - 2 - [x]$ و در نتیجه:

$$f(a) = f(-1) = -1 - 2 + 1 = -2$$

- ۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3 + \sqrt{x}}}{x^2 - 1}$ برابر کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $-\frac{1}{16}$

پاسخ: گزینه ۴

صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 - \sqrt{3 + \sqrt{x}})(2 + \sqrt{3 + \sqrt{x}})}{(x^2 - 1)(2 + \sqrt{3 + \sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - (3 + \sqrt{x})}{4(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{8(x-1)}$$



روش اول:

به طور مشابه صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می کنیم.

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\underbrace{16(x-1)}_2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{16(x-1)} = \frac{-1}{16}$$

روش دوم: هوییتال:

$$\text{HOP: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{16}} = \frac{-1}{16}$$

۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt[3]{3x+a}}{x^2 - 3x + 2}$ در صورت وجود چقدر است؟

$$\frac{1}{8} (4)$$

$$\frac{1}{4} (3)$$

$$\frac{-1}{4} (2)$$

$$-\frac{1}{8} (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اتحاد چاق و لاغر:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

ابتدا دقت کنید که به ازای $x=2$ مخرج کسر برابر صفر است، به شرطی حد وجود دارد که صورت کسر نیز صفر باشد.

$$2 - \sqrt[3]{3x+a} = 0 \xrightarrow{x=2} 2 - \sqrt[3]{6+a} = 0 \Rightarrow a=2$$

روش اول:

حال صورت و مخرج را در قسمت چاق اتحاد چاق و لاغر ضرب می کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - \sqrt[3]{3x+2}) \left(2^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2} \right)}{(x-2) \underbrace{(x-1)}_1 \underbrace{\left(2^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2} \right)}_{12}} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 3x - 2}{12(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)}{12(x-2)} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

روش دوم: هوییتال:

$$\text{HOP: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{-3}{3\sqrt{(3x+2)^2}}}{2x-3} = \frac{-\frac{1}{4}}{1} = -\frac{1}{4}$$

۵- فرض کنید $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x - 4}$ و $g(x) = 1 + \frac{a}{x}$ باشد و اگر $\lim_{x \rightarrow 1} (f \cdot g)(x)$ موجود باشد، مقدار آن چقدر است؟

$$0/4 (4)$$

$$0/3 (3)$$

$$0/2 (2)$$

$$0/1 (1)$$

پاسخ: گزینه ۲



مخرج کسر f به ازای $x=1$ برابر صفر است، حد زمانی وجود دارد که صورت کسر g نیز صفر باشد.

$$g(x) = \frac{x+a}{x} \rightarrow x+a=0 \xrightarrow{x=1} a=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 + 3x - 4} \times (1 - \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)(x+4)} \times \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(x+4)} = \frac{1}{5}$$

۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x - \sqrt{x^2 + 4})$ کدام است؟

(۱) -۴ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳

نکته: قانون پرتوان:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots} = \frac{a}{a'}$$

عبارت داده شده را در مزدوج پرائنز ضرب و تقسیم می کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x - \sqrt{x^2 + 4}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2 - x^2 - 4)}{x + \sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x + \sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x + |x|} = \frac{-4}{2} = -2 \end{aligned}$$

۷- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{ax^2 + bx - 8} = -\infty$ باشد، مقدار b کدام است؟

(۱) -۴ (۲) ۴ (۳) -۸ (۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴

نکته: اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای ریشه مضاعف α باشد، می توانیم معادله را به صورت $a(x - \alpha)^2 = 0$ بنویسیم.

با توجه به این که حاصل حد برابر بی نهایت شده است، پس $x=2$ ریشه مضاعف است و چون جواب حد فقط برابر $-\infty$ است (نه $+\infty$) پس $x=2$ ریشه مضاعف مخرج است.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx - 8 &= a(x-2)^2 = ax^2 - 4ax + 4a \\ \Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ -8 = 4a \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

۸- اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(1 + \frac{1}{x})$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) -۱

پاسخ: گزینه ۲



نکته: قضیه پرتوان:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots} = \frac{a}{a'}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xf\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \times \frac{\left|1 + \frac{1}{x} - 1\right|}{1 + \frac{1}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \times \left|\frac{1}{x}\right|}{2 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \times \left(-\frac{1}{x}\right)}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{-1}{2+0} = \frac{-1}{2}$$

۹- تابع $f(x) = \begin{cases} x[x] & |x| < 1 \\ ax^2 + bx & |x| \geq 1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است، مقدار b کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

نکته: شرط پیوستگی تابع f در نقطه $x = a$ آن است که:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

باید پیوستگی تابع f را در دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ بررسی کنیم.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x[x] = 1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + bx) = a + b \Rightarrow \boxed{a + b = 0}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x[x] = (-1)(-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax^2 + bx) = a - b \Rightarrow \boxed{a - b = 1} \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

۱۰- تابع $f(x) = |x| + \left[\frac{-x}{2}\right]$ در چند نقطه از بازه $(-2, 3)$ ناپیوسته است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر f یک تابع خطی و یا سهمی باشد، تابع $y = [f(x)]$ در نقاطی که $f(x)$ برابر عدد صحیح گردد، پیوسته نیست (مگر این که f در آن $\min$ داشته باشد).

تابع $|x|$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس دنبال نقاط ناپیوستگی $\left[-\frac{x}{2}\right]$ باشیم. در نقاطی که $-\frac{x}{2}$ برابر عدد صحیح باشد، تابع $\left[-\frac{x}{2}\right]$ ناپیوسته است. لذا باید x زوج باشد. $x = 2$ و $x = 0$ تنها نقاط ناپیوستگی تابع اند.

۱۱- تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - a}{x + 1} & x \neq -1 \\ x + b & x = -1 \end{cases}$ در نقطه $x = -1$ پیوسته است، مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳



نکته: شرط پیوستگی f در $x = a$ آن است که:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - a}{x + 1}$$

زمانی این حد وجود دارد که صورت کسر برابر صفر باشد (چون مخرج کسر صفر است).

$$x^3 - a = 0 \xrightarrow{x=-1} -1 - a = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = 3$$

با توجه به این که $f(-1) = -1 + b$ پس باید $-1 + b = 3$ باشد و در نتیجه $b = 4$ و $a + b = 3$.

۱۲- اگر $f(x) = x^3 \sqrt{\frac{2x}{x-3}}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 8}{x - 4}$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

-2 (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۱

نکته ۱: اگر f و g مشتق پذیر باشند، آنگاه:

$$(fg)' = f'g + g'f$$

نکته ۲: اگر u تابعی از x باشد، آنگاه:

$$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

نکته ۳:

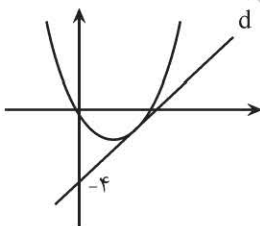
$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

در این سؤال هدف محاسبه $f'(4)$ است. با توجه به نکات گفته شده، مشتق می گیریم:

$$f'(x) = \sqrt{\frac{2x}{x-3}} + x \left(\sqrt{\frac{2x}{x-3}} \right)' = \sqrt{\frac{2x}{x-3}} + x \frac{\frac{-6}{(x-3)^2}}{3\sqrt{\left(\frac{2x}{x-3}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \sqrt{8} + 4 \times \frac{-6}{3\sqrt{64}} = 2 - \frac{24}{12} = 0$$

۱۳- در شکل مقابل خط d بر سهمی $f(x) = x^2 - 3x$ مماس است. طول نقطه تماس کدام است؟



$\frac{11}{4}$ (۱)

۲ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۳)

$\frac{8}{3}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲



نکته: خط $y = mx + h$ بر سهمی $y = f(x)$ به شرطی مماس است که در معادله $f(x) = mx + h$ حاصل Δ برابر صفر باشد.
شیب خط d را m فرض کنید:

$$d \text{ خط } y - (-4) = m(x - 0) \Rightarrow y = mx - 4$$

$$x^2 - 3x = mx - 4 \Rightarrow x^2 - (3+m)x + 4 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (3+m)^2 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow 3+m = \pm 4 \Rightarrow m = 1 \text{ یا } -7$$

با توجه به این که شیب d مثبت است پس $m = 1$ قابل قبول است. در این حالت معادله تقاطع $x^2 - 4x + 4 = 0$ است پس $x = 2$ طول نقطه تماس است.

۱۴- اگر تابع f در $x = 2$ پیوسته و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = -2$ باشد، مقدار مشتق تابع $y = xf\left(\frac{2}{x}\right)$ به ازای $x = 1$ چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) -۳

پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱: اگر u تابعی از x باشد، آنگاه:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

نکته ۲: اگر f و g در a مشتق پذیر باشند، آنگاه:

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$$

دقت کنید در حد داده شده مخرج صفر است، پس حد وقتی وجود دارد که صورت هم صفر باشد، یعنی $f(2) = 3$ است. نتیجه‌ای که از فرض سؤال می‌گیریم آن است که $f(2) = 3$ و $f'(2) = -2$.

$$y = xf\left(\frac{2}{x}\right) \Rightarrow y' = f\left(\frac{2}{x}\right) + x\left(f\left(\frac{2}{x}\right)\right)'$$

$$\Rightarrow y' = f\left(\frac{2}{x}\right) + x\left(-\frac{2}{x^2}\right)f'\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$\Rightarrow y'(1) = f(2) - 2f'(2) = 3 - 2(-2) = 7$$

۱۵- به ازای کدام مقدار a خط $y = 2x + a$ در نقطه $x = 1$ بر منحنی $y = \frac{x+b}{x-2}$ مماس است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

نکته: توابع f و g به شرطی در نقطه $X = \alpha$ بر هم مماس‌اند که:

$$\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \end{cases}$$

با توجه به نکته بالا باید دو تابع و مشتق آن دو با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} \frac{x+b}{x-2} = 2x+a \\ \frac{-2-b}{(x-2)^2} = 2 \end{cases} \xrightarrow{x=1} \begin{cases} \frac{1+b}{-1} = 2+a \\ -2-b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -4$$

۱۶- اگر $f(x) = 2x + g(x^3)$ و $g'(1) = 2$ ، $g''(1) = -1$ باشد، مقدار $f''(1)$ کدام است؟

(۱) -۱۲ (۲) -۶ (۳) ۳ (۴) ۹



پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر u تابعی از x باشد، آنگاه:

$$(f(u))' = u'f'(u)$$

از دو طرف تساوی دو بار مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 2 + 3x^2 g'(x^3)$$

حال از مشتق حاصل ضرب دو تابع استفاده می‌کنیم.

$$f''(x) = 6xg'(x^3) + 3x^2(g'(x^3))' = 6xg'(x^3) + 3x^2(3x^2g''(x^3))$$

$$f''(1) = 6g'(1) + 9g''(1) = 6 \times 2 + 9(-1) = 3$$

۱۷- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = ax + \sqrt{2x-1}$ در بازه $[1, 5]$ برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در نقطه‌ای با کدام طول است؟

۲ (۴)

۲/۵ (۳)

۳ (۲)

۳/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته: آهنگ تغییر متوسط f در بازه $[a, b]$ برابر است با: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ آهنگ تغییر لحظه‌ای f در نقطه a برابر است با: $f'(a)$

$$f'(x) = \frac{f(5)-f(1)}{5-1}$$

$$\Rightarrow a + \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{5a+2-(a+1)}{4} = \frac{4a+2}{4} = a + \frac{2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2x-1} = 2 \Rightarrow x = 2/5$$

۱۸- اگر $f(x) = |x| - \frac{12}{\sqrt[3]{x^2}}$ باشد، مقدار $f'(-8)$ کدام است؟

۱/۲۵ (۴)

۰/۷۵ (۳)

-۰/۷۵ (۲)

-۱/۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

نکته: اگر u تابعی از x باشد، آنگاه: $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ چون $x = -8$ منفی است، پس $|x| = -x$ است.

$$f(x) = -x - 12(x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{2 \times 12}{3}(x)^{-\frac{5}{3}}$$

$$f'(-8) = -1 + \frac{24}{3}(-8)^{-\frac{5}{3}} = -1 - \frac{24}{3\sqrt[3]{8^5}} = -1 - \frac{24}{3 \times 32} = -1 - \frac{1}{4} = -1/25$$

۱۹- خطوط نیم مماس چپ و راست بر منحنی $f(x) = |x-2|(x^2+a)$ در نقطه گوشه‌ای آن، بر هم عمودند، مقدار a کدام است؟

-۵ یا -۳ (۴)

-۴ یا ۳ (۳)

-۵ یا ۴ (۲)

۴ یا -۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴



نکته: اگر $x = \alpha$ ریشه ساده چند جمله‌ای f باشد، آنگاه تابع $y = |f(x)|$ در این نقطه دو نیم مماس چپ و راست دارد و این نقطه را نقطه گوشه می‌نامیم در $x = 2$ تابع f نقطه گوشه دارد.

$$x \geq 2 \rightarrow f(x) = (x-2)(x^2 + a)$$

$$\rightarrow f'(x) = x^2 + a + 2x(x-2) \Rightarrow f'_+(2) = 4 + a$$

$$x < 2 \rightarrow f(x) = -(x-2)(x^2 + a)$$

$$\rightarrow f'(x) = -(x^2 + a) - 2x(x-2) \rightarrow f'_-(2) = -4 - a$$

شرط عمود بودن دو نیم مماس بر یکدیگر آن است که حاصل ضرب شیب آنها برابر -1 باشد.

$$(4+a)(-4-a) = -1 \Rightarrow a = -3, -5$$

۲۰- خط $y = 2x + 1$ در نقطه $x = 2$ بر منحنی $y = f(x)$ مماس است، اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+2h) - 2}{h} = 3$ باشد، حاصل $(fog)'(1)$ کدام است؟

۶ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱: اگر f در a مشتق پذیر باشد، آنگاه:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a)}{h} = m f'(a)$$

نکته ۲: فرمول مشتق تابع مرکب:

$$(fog)'(a) = g'(a) \cdot f'(g(a))$$

خط $y = 2x + 1$ بر f مماس است، پس شیب آن همان $f'(2)$ است، پس $f'(2) = 2$ ، $f(2) = 5$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+2h) - 2}{h} = 2g'(1) = 3 \Rightarrow g'(1) = \frac{3}{2}$$

در ضمن برای آن که حالت $\frac{0}{0}$ باشد، باید $g(1) = 2$ باشد.

$$(fog)'(1) = g'(1) \cdot f'(g(1)) = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

۲۱- اگر $f(x) = \frac{x^2}{g(x)}$ و $f(-1) = \frac{1}{4}$ و $g'(-1) = 3$ باشد، مقدار $f'(-1)$ کدام است؟

 $\frac{-1}{2}$ (۴) $\frac{-1}{4}$ (۳) $\frac{-7}{4}$ (۲) $\frac{-5}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر f و g مشتق پذیر و $g' \neq 0$ آنگاه:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$



ابتدا $g(-1)$ را می‌یابیم:

$$f(x) = \frac{x^2}{g(x)} \xrightarrow{x=-1} f(-1) = \frac{1}{g(-1)} \Rightarrow g(-1) = \frac{1}{f(-1)} = 2$$

حال از عبارت f مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{2xg(x) - x^2g'(x)}{g^2(x)} \Rightarrow f'(-1) = \frac{-2g(-1) - g'(-1)}{g^2(-1)} = \frac{-4-3}{4} = \frac{-7}{4}$$

۲۲- مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴)

۲ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق f ، مقادیر تابع در نقاط بحرانی و ابتدا و انتهای بازه را یافته و با هم مقایسه می‌کنیم.

دامنه: $4-x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = x$$

$x \geq 0 \Rightarrow 4-x^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ نقطه بحرانی

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2} & \text{max} \\ x = -2 \Rightarrow y = -2 & \text{min} \\ x = 2 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

۲۳- بیشترین مساحت مستطیلی مطابق شکل که یک ضلع آن بر محور x ها و دو رأس دیگر آن روی نمودار تابع $y = 12 - x^2$ قرار دارد کدام است؟

۲۴ (۱)

۳۲ (۲)

۳۶ (۳)

۴۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

نقطه $M(x, y)$ را روی سهمی در نظر می‌گیریم. رابطه $y = 12 - x^2$ برقرار است.

$$S = 2xy = 2x(12 - x^2)$$

برای یافتن ماکزیمم S ، از آن مشتق می‌گیریم.

$$S' = 24 - 6x^2$$

$$S' = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = 4(12 - 4) = 32$$

۲۴- فاصله نقطه مینیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x+2)^2}$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

$\frac{\sqrt{7}}{3}$ (۴)

$\frac{\sqrt{10}}{3}$ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)



پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر f مشتق پذیر و $x = c$ یک نقطه اکسترمم نسبی آن باشد، آنگاه $f'(c) = 0$ است.

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x+2)^2 - 2(x+2)(x^2-4x)}{(x+2)^4} = \frac{(2x-4)(x+2) - 2(x^2-4x)}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{2(x^2-4) - 2(x^2-4x)}{(x+2)^3} = \frac{-4+8x}{(x+2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -4+8x = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \min$$

به ازای $x = 1$ مقدار تابع $y = f(1) = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$ است.

فاصله نقطه $(1, \frac{-1}{3})$ از مبدأ برابر است با: $\sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

۲۵- به ازای چه مقادیری از a تابع $y = x(x^2 + 3x - a)$ همواره صعودی است؟

$a \leq -3$ (۴)

$a \geq 3$ (۳)

$a \geq -3$ (۲)

$a \leq 3$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

نکته: اگر f در بازه (a, b) مشتق پذیر و در این بازه همواره $f'(x) \geq 0$ باشد، آنگاه f در این بازه صعودی است.

$$y = x^3 + 3x^2 - ax \Rightarrow y' = 3x^2 + 6x - a$$

شرط آن که همواره $y' \geq 0$ باشد، باید $\Delta \leq 0$ باشد.

$$y' \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow 36 + 12a \leq 0 \Rightarrow a \leq -3$$

۲۶- اگر $x = 2$ طول یک نقطه بحرانی تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + 1$ باشد، مقدار ماکزیمم نسبی این تابع چقدر است؟

-12 (۴)

9 (۳)

-19 (۲)

8 (۱)

پاسخ: گزینه ۱

نکته: نقطه $x = c$ از دامنه f بحرانی است، هرگاه $f' = 0$ باشد و یا f' موجود نباشد.

نکته: در تابع مشتق پذیر f ، اگر $x = c$ یک نقطه اکسترمم نسبی باشد، آنگاه $f'(c) = 0$ است. اگر علامت f' در نقطه بحرانی c از مثبت به منفی عوض شود، این نقطه، ماکزیمم نسبی و اگر از منفی به مثبت عوض شود، این نقطه، مینیمم نسبی است.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + a$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 24 - 12 + a = 0 \Rightarrow a = -12$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \xrightarrow{f'=0} x = -1, 2$$

x	-1	2
f'	+	-

$$\Rightarrow x_{\max} = -1 \rightarrow \max = f(-1) = 8$$

۲۷- نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x|x-4| + 2x$ به چه فاصله‌ای از یکدیگر قرار دارند؟

$2\sqrt{2}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

2 (۲)

1 (۱)

پاسخ: گزینه ۳



تابع را دو ضابطه‌ای می‌کنیم و سپس نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x(x-4) + 2x & x \geq 4 \\ -x(x-4) + 2x & x < 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 4 \\ -x^2 + 6x & x < 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x > 4 \\ -2x + 6 & x < 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 3$$

دقت کنید $x = 1$ در ضابطه اول شرط $x > 4$ را ندارد.

نقاط $x = 3$ و $x = 4$ نقاط بحرانی‌اند.

x	۳	۴
f'	+	-
f	↗	↘

$$\begin{cases} A(3, 9) \\ B(4, 8) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

۲۸- نقطه A روی منحنی $y = \sqrt{2x+5}$ در ناحیه دوم قرار دارد، کمترین فاصله نقطه A از مبدأ چقدر است؟

$$\sqrt{3} \quad (4)$$

$$\sqrt{5} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$2/5 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

نکته: فاصله دو نقطه $A(a, b)$ و $B(c, d)$ از یکدیگر برابر است با: $AB = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$

نقطه $A(x, y)$ را روی تابع در نظر می‌گیریم در این صورت $y = \sqrt{2x+5}$ است.

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{2x+5})^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$$

برای یافتن مینیمم OA از آن مشتق می‌گیریم و نقطه بحرانی آن را می‌یابیم:

$$(OA)' = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}} = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow OA = \sqrt{4} = 2$$

۲۹- مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + k$ در بازه $[-2, 2]$ $-\frac{1}{4}$ برابر مقدار مینیمم مطلق آن است، مقدار k کدام

است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

نکته: برای یافتن max و min مطلق تابع پیوسته f در بازه $[a, b]$ ، مقادیر تابع در نقاط بحرانی و ابتدا و انتهای بازه را محاسبه و با هم مقایسه می‌کنیم.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ در بازه نیست}$$



مقادیر تابع در نقطه بحرانی $x = -1$ و ابتدا و انتهای بازه یعنی $x = -2$ و $x = 2$ را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = k - 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = k + 5 \quad \text{max} \\ x = 2 \Rightarrow y = k - 22 \quad \text{min} \end{cases} \Rightarrow k + 5 = -\frac{1}{4}(k - 22) \Rightarrow 4k + 20 = -k + 22 \Rightarrow k = 4$$

۳۰- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x < 2 \\ 3 - x & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ از نظر وجود ماکزیمم و مینیمم مطلق چگونه است؟

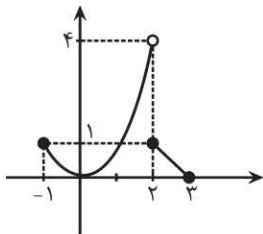
(۱) min و max دارد ولی max ندارد.

(۲) min و max دارد.

(۳) max دارد ولی min ندارد.

(۴) نه min دارد و نه max

پاسخ: گزینه ۲



تابع f در $x = 2$ ناپیوسته است، پس برای یافتن نقاط اکسترمم نسبی، نمودار تابع را رسم می کنیم. با توجه به نمودار، مقدار مینیمم تابع برابر صفر است و تابع f ماکزیمم ندارد.

